OPCIÓN A

A.1.- Sea el sistema homogéneo de ecuaciones $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ ax-y+z=0 \\ x+2ay-z=0 \end{cases}$

a) Determinar el valor o valores del parámetro **a** para que el sistema tenga soluciones distinta de la nula

b) Resolver el sistema para el valor o los valores hallados en el apartado anterior

a) Son aquellos que hacen que el determinante de los coeficientes sea nulo y que generan sistemas compatibles indeterminados

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 2a & -1 \end{vmatrix} = 1+1-4a^2-2-2a+a = -4a^2-a = -a\,(4a+1) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -a\,(4a+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ 4a+1 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \forall a \in \Re - \left\{ -\frac{1}{4}, 0 \right\} = rang(A) = 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Cuando \begin{cases} a = 0 \\ a = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

A.2.- La recta $x = \frac{1-y}{3} = \frac{2-z}{2}$ corta a los tres planos coordenados en tres puntos

a) Determinar las coordenadas de estos puntos

b) La distancias existentes entre cada par de ellos

c) Indicar cual es el que se encuentra en medio de los otros dos

$a)$

$$x = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-3\lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Corte\ con\ OXY \equiv z = 0 \Rightarrow 2-2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow A \begin{cases} x = 1 \\ y = 1-3.1 = -2 \\ z = 2-2.1 = 0 \end{cases} \\ Corte\ con\ OXZ \equiv y = 0 \Rightarrow 1-3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow B \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 0 \\ z = 2 - \frac{2.}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \\ Corte\ con\ OYZ \equiv x = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow C \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right) - (1, -2, 0) = \left(-\frac{2}{3}, 2, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+36+16}{9}} = \frac{\sqrt{56}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{14}\ u \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2) - (1, -2, 0) = (-1, 3, 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}\ u \\ \overrightarrow{BC} = (0, 1, 2) - \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+9+4}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{14}\ u \end{cases}$$

c) El punto medio es el **B**, se denota en las distancias, los mas alejados son **A** y **C** cuya distancia es igual a la suma de la distancias de **A** a **B** y de **B** a **C**

A.3.- Descomponer el número **e** en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima
Calcular dicha suma

$$\begin{cases} e = x + y \Rightarrow y = e - x \\ S = \ln x + \ln y = \ln x + \ln (e-x) \end{cases} \Rightarrow S' = \frac{1}{x} + \frac{(-1)}{e-x} = \frac{e-x-x}{x(e-x)} = \frac{e-2x}{ex-x^2} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow e - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$e = 2x \Rightarrow x = \frac{e}{2}$$

$$S'' = \frac{-2x(e-x)-(e-2x)\cdot(e-2x)}{x^2(e-x)^2} = \frac{-2xe+2x^2-(e^2-4ex+4x^2)}{x^2(e-x)^2} = \frac{-2x^2-e^2+2ex}{x^2(e-x)^2}$$

$$S''\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{-2\left(\frac{e}{2}\right)^2 - e^2 + 2e\left(\frac{e}{2}\right)}{\left(\frac{e}{2}\right)^2\left[e-\left(\frac{e}{2}\right)\right]^2} = \frac{(-2)\frac{e^2}{4} - e^2 + e^2}{\frac{e^2}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^2} = \frac{(-2)\frac{e^2}{4}}{\frac{e^2}{4}\cdot\frac{e^2}{4}} = -\frac{2}{\frac{e^2}{4}} = -\frac{8}{e^2} < 0 \Rightarrow \textit{Máximo}$$

$$y = e - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}$$

$b)$

$$S = \ln\frac{e}{2} + \ln\frac{e}{2} = \ln\left(\frac{e}{2}\cdot\frac{e}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$$

$$\textit{Tambien se puede dar como} \Rightarrow S = \ln e^2 - \ln 4 = 2.\ln e - \ln 4 = 2.1 - \ln 4 = 2 - \ln 4$$

A.4.- Calcular el área encerrada entre las gráficas de la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$

$$\textit{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ x = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 + 2 = 2 \\ 0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2 > x^2 \quad en \quad -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow$$

$$A = \int_{-1}^{2} (x+2)\, dx - \int_{-1}^{2} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{-1}^{2} + 2\left[x\right]_{-1}^{2} - \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[2^2 - (-1)^2\right] + 2.\left[2 - (-1)\right] - \frac{1}{3} \cdot \left[2^3 - (-1)^3\right]$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (4-1) + 6 - \frac{1}{3} \cdot \left[8 - (-1)\right] = \frac{3}{2} + 6 - \frac{9}{3} = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}\, u^2$$

OPCIÓN B

B.1 a) Determinar una matriz cuadrada **X** que verifique $AX + XA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ siendo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

.

b) Analizar, posteriormente, si la matriz **X** es invertible, y en el caso de serlo calcular su matriz inversa.

$a)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & 2b \\ a+2c+d & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=2 \\ 2b=-2 \Rightarrow b=-1 \\ a+2c+d=3 \\ b+2d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-1=2 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2}+2c+d=3 \quad \Rightarrow 2c+d=3-\dfrac{3}{2} \Rightarrow \\ -1+2d=3 \Rightarrow d=2 \end{cases}$$

$$2c+2=\frac{3}{2} \Rightarrow 2c=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2} \Rightarrow c=-\frac{1}{4} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & -1 \\ -\dfrac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

$b)$

$$|X| = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2} & -1 \\ -\dfrac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\cdot 2-\frac{1}{4}=3-\frac{1}{4}=\frac{12-1}{4}=\frac{11}{4} \neq 0 \Rightarrow \exists X^{-1} \Rightarrow X^{-1}=\frac{1}{|X|}\cdot\left(adj\ X^t\right) \Rightarrow$$

$$X^t = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{4} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(adj\ X^t\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \frac{1}{\frac{11}{4}}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{4}{11}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{11} & \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{1}{11} & \dfrac{6}{11} \end{pmatrix}$$

B.2.

a) Sea **r** la recta intersección de los dos planos $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

a) Determinar el plano π que contiene a la recta **r** y que pasa por el origen de coordenadas.

b) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el punto **(1 , 0 , 1)**

a) Utilizaremos la ecuación del haz de planos que pasa por la recta intersección de los planos. Calcularemos el parámetro de ese haz que pasador el punto dado (el origen de coordenadas) que nos da el parámetro con el que calcularemos el plano pedido

$$x+2y-z-3+\lambda(2x-y+z-1)=0 \Rightarrow 0+2.0-0-3+\lambda(2.0-0+0-1)=0 \Rightarrow -3-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

$$x+2y-z-3-3\cdot(2x-y+z-1)=0 \Rightarrow x+2y-z-3-6x+3y-3z+3=0 \Rightarrow -5x+5y-4z=0$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 5x-5y+4z=0$$

b) La recta **r,** pedida, tiene como vector director el del plano π

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}=(5\,,-5\,,4) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+5\lambda \\ y=-5\lambda \\ z=1+4\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{5}=\frac{y}{-5}=\frac{z-1}{4}$$

B.3.- Sea el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$

a) Determinar los coeficientes **a , b** y **c** sabiendo que tiene extremos en **x = - 1** y en **x = 1** y que pasa por el origen de coordenadas

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos

$a)$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow 0^3 + a.0^2 + b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow 3.(-1)^2 + 2a.(-1) + b. = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -3 \Rightarrow \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3.1^2 + 2a.1 + b. = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3 \end{cases}$$

$$2b = -6 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow 2a - 3 = -3 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$b)$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = 6.(-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow (-1\,,\,2) \\ f''(1) = 6.1 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3.1 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow (1\,,\,-2) \end{cases}$$

B.4,- Sea la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$

a) Probar que es tangente a uno de los ejes coordenados, indicando a cual

b) Calcular el área encerrada entre la gráfica de la parábola y los dos ejes coordenados

$a)$

$$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f(3) = 3^2 - 6.3 + 9 = 0 \Rightarrow En\ (3\ ,\ 0)$$

Tangente al eje OX (abcisas) en el punto indicado

$b)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$f(2) = 2^2 - 6.2 + 9 = 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / 0 \leq x \leq 3$$

$$A = \int_0^3 \left(x^2 - 6x + 9\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^3 + 9 \cdot \left[x\right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(3^3 - 0^3\right) - 3 \cdot \left(3^2 - 0^2\right) + 9 \cdot (3 - 0)$$

$$A = \frac{27}{3} - 3 \cdot 9 + 9 \cdot 3 = 9\ u^2$$